МАТЕМАТИКА

УДК 511.8

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ ВО МНОЖЕСТВЕ ПОЛУКВАТЕРНИОНОВ

канд. физ.-мат. наук, доц. А.А. КОЗЛОВ,
К.С. СУРАВНЕВА, Н.Д. ЖАЛЕЙКО
(Полоцкий государственный университет)

Предложено определение преобразования подобия для полукватернионов и доказано, что, вообще говоря, это преобразование (*так же, как и в случае кватернионов* [2, с. 29]) *изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Получена формула преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие. В дальнейшем планируется установить геометрический смысл этого преобразования.*

Ключевые слова: *полукватернионы, гиперкомплексные числа, преобразование подобия.*

Введение. На сегодняшний день теория гиперкомплексных чисел представляет собой не только достаточно стройную фундаментальную математическую теорию, но и действенный аппарат для решения многих прикладных задач. Так, например, дуальные числа позволяют математически, с определенной степенью точности, описать физическое пространство-время [1], кватернионы используются в вопросах управления космическим аппаратом [2, 3], при решении задач компьютерного моделирования 3D-объектов [4] и др.

Сама теория гиперкомплексных чисел появилась как обобщение теории действительных чисел. Первым таким обобщением стало *множество комплексных чисел*, т.е. чисел вида $z = a + bi$, где a, b – действительные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица. Необходимость введения этой числовой совокупности была обусловлена тем, что во множестве действительных чисел не каждое алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имело решение. Во введенном же множестве комплексных чисел, как выяснилось, всякое алгебраическое уравнение n-й степени с комплексными коэффициентами обладает ровно n корнями с учетом их кратностей. Это так называемая основная теорема алгебры [7]. Другим распространением понятия «действительное число» [8, с. 20–23] стало введение *множества дуальных чисел*, т.е. чисел вида $a + bi$, в которых a, b – действительные числа, а мнимая единица $i^2 = 0$, причем $i \notin R$ (здесь и всюду далее R обозначает совокупность действительных чисел). Такое множество, как выяснилось совсем недавно, позволяет достаточно точно математически смоделировать физическое пространство-время [1].

Дальнейшее распространение теории комплексных чисел нашло свое отражение во введенном В. Гамильтоном в 1843 г. понятии *кватерниона* [8, с. 28]

$$q = a + bi + cj + dk,$$

где a, b, c, d – действительные числа;

$i, j, k \notin R$ – базисные (кватернионные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k, \; jk = i, \; ki = j, \; ik = -j, \quad kj = -i, \quad ji = -k .$$

Такие числа, а также последующие их обобщения, и стали в дальнейшем носить название *гиперкомплексные числа*. Позднее оказалось, что кватернионы являются не просто отдельным теоретическим объектом математики, но хорошим алгебраическим средством для описания вращений в трех- и четырехмерном векторном пространстве [2, 4], которые, в свою очередь, широко используются [9, 10] в электродинамике, квантовой и теоретической физиках, теории управления [2], компьютерном моделировании 3D-объектов [4] и других областях знаний.

Иным обобщением множества комплексных чисел явилось введенное в 1997 г. Б. Розенфельдом в работе «Геометрия групп Ли» [5] понятие полукватерниона как обобщения комплексного числа, являющееся своего рода синтезом дуальных и комплексных чисел. Позднее, в 2013 г., иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари были определены [6] арифметические операции во множестве полукватернионов и изучены свойства этих операций, а также получены решения отдельных классов уравнений над полукватернионами.

Определение 1 [5]. *Действительным полукватернионом* (или просто *полукватернионом*) назовем формальное выражение

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k, \tag{1}$$

в котором a_0, a_1, a_2, a_3 – действительные числа; $i, j, k \notin R$ – кватернионные (базисные) единицы, для которых выполняются соотношения:

$$i^2 = -1, \ j^2 = k^2 = 0, \quad ij = k, \quad ji = -k, \quad ik = -j, \quad ki = j, \quad jk = 0, \quad kj = 0.$$

Множество всех полукватернионов обозначим через H_s.

Определение 2 [6]. *Суммой полукватернионов* $q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ будем называть полукватернион $q = q_1 q_2 \in H_s$, определяемый равенством

$$q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k. \tag{2}$$

Определение 3. [6] *Произведением полукватернионов* $q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $q_2 = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ назовем полукватернион $q = q_1 q_2 \in H_s$, определяемый следующим равенством:

$$q = (a_0 b_0 - a_1 b_1) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)i + (a_0 b_2 - a_1 b_3 + a_2 b_0 + a_3 b_1)j + (a_0 b_3 + a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_3 b_0)k. \tag{3}$$

Операцию произведения полукватернионов можно представить [6] в матрично-векторной форме, т.е. в виде произведения матрицы с элементами (некоторыми коэффициентами первого полукватерниона) на вектор, элементами которого являются числа, стоящие при действительной и мнимых единицах второго сомножителя

$$q = q_1 q_2 = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Последнее представление, а также операции над полукватернионами, было предложены иранскими математиками Х. Мортазашлом и М. Джафари в статье [6], в которой кроме того были введены определения нормы и сопряженного полукватерниона и установлены нижеприведенные теоремы 1 и 2.

Теорема 1 [6]. *Операция произведения замкнута во множестве полукватернионов и обладает свойствами ассоциативности, некоммутативности и дистрибутивности относительно операции сложения полукватернионов.*

Пример 1. Пусть даны полукватернионы

$$q_1 = 4 - 6i + 5j - 3k \ \text{ и } \ q_1 = -2 + 6i + 9j + k.$$

Тогда их произведением будет полукватернион

$$q_1 q_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 36 \\ 14 \\ -74 \end{pmatrix} = 28 + 36i + 14j - 74k.$$

Определение 4. [6] *Сопряженным полукватернионом* для $a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ назовем полукватернион

$$\overline{q} = a_0 - (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \in H_s. \tag{5}$$

Пример 1 (продолжение)**.** Сопряженным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$\overline{q_1} = 4 + 6i - 5j + 3k. \tag{6}$$

Определение 5. [6] *Нормой полукватерниона* $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ назовем действительное число, равное

$$N_q = q \cdot \overline{q} = a_0^2 + a_1^2. \tag{7}$$

Пример 1 (продолжение)**.** Норма полукватерниона q_1 равна

$$N_{q_1} = 4^2 + (-6)^2 = 52. \tag{8}$$

Определение 6. [6] *Обратным для полукватерниона* $q \in H_s$ назовем полукватернион $q^{-1} \in H_s$, вычисляемый по формуле

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{N_q}, \tag{9}$$

где $N_t \neq 0.$

Пример 1 (продолжение)**.** В силу **определения 6** с учетом формул (6) и (8) обратным для полукватерниона q_1 является полукватернион

$$q_1 = \frac{1}{52}(4 + 6i - 5j + 3k).$$

Теорема 2 [6]. *При всяких* $q, q_1, q_2 \in H_s$ *и* $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ *для операции сопряжения полукватернионов имеют место следующие свойства:*

1) $\overline{\overline{q}} = q$; 2) $\overline{c_1 q_1 + c_2 q_2} = c_1 \overline{q}_1 + c_2 \overline{q}_2$; 3) $N_{cq} = c^2 N_q$; 4) $N_{q_1 \cdot q_2} = N_{q_1} \cdot N_{q_2}$; 5) $N_{\overline{q}} = N_q$.

Основная часть. В настоящей работе введено преобразование подобия для множества полукватернионов и доказано, что в общем случае оно, как и для случая кватернионов, изменяет вид преобразуемого гиперкомплексного числа. Кроме того, предложены формула вычисления преобразования подобия полукватернионов и некоторые следствия, из нее вытекающие.

Определение 7. *Левым* (*правым*) *преобразованием подобия* $\prod_t^l(q)$ $\left(\prod_t^r(q)\right)$ *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t, *для которого* $N_t \neq 0$, назовем следующее преобразование

$$\prod{}_t^l(q) = t(qt^{-1}) \quad \left(\prod{}_t^r(q) = (tq)t^{-1}\right). \tag{10}$$

Замечание 1. В силу **теоремы 1** операция умножения полукватернионов является замкнутой во множестве полукватернионов, поэтому справедливо включение

$$\prod{}_t^l(q) \in H_s \left(\prod{}_t^r(q) \in H_s\right).$$

Кроме того, ввиду той же теоремы операция умножения полукватернионов ассоциативна, а значит, левое и правое преобразование подобия совпадают, т.е. для любых $q \in H_s$ и $t \in H_s$, где $N_t \neq 0$, имеют место равенства

$$\prod{}_t^l(q) = t(qt^{-1}) = (tq)t^{-1} = \prod{}_t^r(q).$$

Таким образом, скобки в формуле (10) не играют никакой роли и, следовательно, можно говорить в целом о преобразовании подобия на множестве полукватернионов. Итак,

Определение 8. *Преобразованием подобия* $\prod_t(q)$ *полукватерниона* q *с помощью полукватерниона* t, *где* $N_t \neq 0$, будем называть преобразование вида

$$\prod{}_t(q) = tqt^{-1}. \tag{11}$$

Теорема 2 (формула преобразования подобия). *Пусть даны* $q \in H_s$ *и* $t \in H_s$, *где* $N_t \neq 0$. *Тогда формула для преобразования подобия* $\prod_t(q)$ *полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид*

$$\prod_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Доказательство. Пусть даны произвольные полукватернионы $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ и $t = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$, причем $N_t \neq 0$. Тогда в силу **определения 6** для полукватерниона t найдется ему обратный, для которого верны равенства

$$t^{-1} = \frac{\overline{t}}{N_t} = \frac{1}{b_0^2 + b_1^2}(b_0 - b_1 i - b_2 j - b_3 k). \qquad (13)$$

Найдем вначале произведение qt^{-1}, а затем полученное выражение умножим слева на число t. При нахождении этих произведений будем пользоваться матрично-векторным представлением умножения полукватернионов (4), а также формулой (13). Имеем равенства

$$qt^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{b_0}{b_0^2+b_1^2} \\ -\frac{b_1}{b_0^2+b_1^2} \\ -\frac{b_2}{b_0^2+b_1^2} \\ -\frac{b_3}{b_0^2+b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2+b_1^2} \end{bmatrix}$$

и, далее

$$t(qt^{-1}) = \begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{a_0b_0}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_1b_1}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_1b_0}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_1}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_2b_0}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_3b_1}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_2}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_1b_3}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_3b_0}{b_0^2+b_1^2} + \frac{a_2b_1}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_1b_2}{b_0^2+b_1^2} - \frac{a_0b_3}{b_0^2+b_1^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2+b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия $\prod_t(q)$ полукватерниона q с помощью полукватерниона t имеет вид

$$\prod_t(q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \frac{a_2b_0^2 + (2a_1b_3 - 2a_3b_1)b_0 + 2a_1b_1b_2 - a_2b_1^2}{b_0^2+b_1^2} \\ \frac{a_3b_0^2 + (-2a_1b_2 + 2a_2b_1)b_0 + 2a_1b_1b_3 - a_3b_1^2}{b_0^2+b_1^2} \end{bmatrix}.$$

Отсюда с учетом равенства $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ следуют соотношения

$$\Pi_t(q) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{a_2 b_0^2 + (2a_1 b_3 - 2a_3 b_1) b_0 + 2a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_2 \\ \dfrac{a_3 b_0^2 + (-2a_1 b_2 + 2a_2 b_1) b_0 + 2a_1 b_1 b_3 - a_3 b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} - a_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{(2a_1 b_3 - 2a_3 b_1) b_0 + 2a_1 b_1 b_2 - 2a_2 b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \\ \dfrac{(-2a_1 b_2 + 2a_2 b_1) b_0 + 2a_1 b_1 b_3 - 2a_3 b_1^2}{b_0^2 + b_1^2} \end{bmatrix} =$$

$$= q + \frac{2}{b_0^2 + b_1^2}\left(\left(a_1 b_3 b_0 - a_3 b_1 b_0 + a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1^2\right) j + \left(-a_1 b_2 b_0 + a_2 b_1 b_0 + a_1 b_1 b_3 - a_3 b_1^2\right) k\right). \tag{14}$$

Преобразуем выражение, стоящее в скобках в последней формуле, используя известное свойство разложения определителя

$$\left(a_1 b_0 b_3 - a_3 b_0 b_1 + a_1 b_1 b_2 - a_2 b_1^2\right) j + \left(-a_1 b_0 b_2 + a_2 b_0 b_1 + a_1 b_1 b_3 - a_3 b_1^2\right) k =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & -b_1 \\ a_3 & b_3 & -b_0 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Тогда отсюда и из формулы (14) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$ получим требуемое соотношение (12).

Теорема 2 доказана.

Замечание 2. В силу формулы (12) и **определения 1** легко видеть, что при преобразовании подобия изменяется лишь часть полукватерниона при базисных единицах, квадрат которых равен нулю.

Пример 2. Рассмотрим преобразование подобия полукватерниона $q = 1 + 2i - 3j + 4k$ с помощью полукватерниона $t = 2 - i + 7j - 5k$, для которого очевидно справедливо неравенство $N_t = 2^2 + (-1)^2 = 5 \neq 0$.

Из формул (8) и (9) следует, что обратным для полукватерниона t является полукватернион

$$t^{-1} = \frac{\overline{t}}{N_t} = \frac{1}{5}(2 + i - 7j + 5k).$$

Найдем преобразование подобия $\prod_t(q)$, для чего вычислим вначале произведение qt^{-1}, а затем полученное выражение умножим слева на число $t = 2 - i + 7j - 5k$. При вычислении указанных произведений будем использовать матрично-векторную запись произведения полукватернионов (4). Получим равенства

$$qt^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\2&1&0&0\\-3&4&1&-2\\4&3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\\-\frac{7}{5}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{19}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}\quad \text{и, далее,}\quad t(qt^{-1})=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\-1&2&0&0\\7&-5&2&1\\-5&-7&-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{19}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-\frac{61}{5}\\-\frac{12}{5}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, преобразование подобия полукватерниона $q=1+2i-3j+4k$ с помощью полукватерниона $t=2-i+7j-5k$ равно

$$\prod{}_t(q)=1+2i-\frac{61}{5}j-\frac{12}{5}k. \tag{15}$$

Воспользуемся теперь для рассматриваемых полукватернионов указанной в **теореме 2** формулой (12). Тогда, используя вначале разложение определителя по первой строке, а далее – правило вычисления определителя третьего порядка, получим соотношения

$$\prod{}_t(q)=q+\frac{2}{N_t}\begin{vmatrix}0&0&j&k\\a_1&b_1&0&0\\a_2&b_2&b_1&-b_0\\a_3&b_3&b_0&b_1\end{vmatrix}=(1+2i-3j+4k)+\frac{2}{5}\begin{vmatrix}0&0&j&k\\2&-1&0&0\\-3&7&-1&-2\\4&-5&2&-1\end{vmatrix}=$$

$$=(1+2i-3j+4k)+\frac{2}{5}\left(j\begin{vmatrix}2&-1&0\\-3&7&-2\\4&-5&-1\end{vmatrix}-k\begin{vmatrix}2&-1&0\\-3&7&-1\\4&-5&2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=1+2i+\left(-3+\frac{2}{5}(-14+0+8-0+3-20)\right)j+\left(4-\frac{2}{5}(28+0+4-0-6-10)\right)k=$$

$$=1+2i+\left(-3+\frac{2}{5}\cdot(-23)\right)j+\left(4-\frac{2}{5}\cdot 16\right)k=1+2i-\frac{61}{5}j-\frac{12}{5}k. \tag{16}$$

Равенство правых частей соотношений (15) и (16) подтверждает справедливость полученной в **теореме 2** формулы для вычисления преобразования подобия полукватернионов.

Поскольку очевидно, что совокупность полукватернионов включает в себя множество действительных, а также комплексных чисел, то рассмотрим следующие частные случаи преобразования подобия, которые описаны в нижеприведенных следствиях 1–5.

Следствие 1. *Пусть* $q\in\mathbb{R}$ *и* $t\in H_s$, *где* $N_t\neq 0$. *Тогда имеет место равенство* $\prod_t(q)=q$.

Доказательство. Возьмем любые числа $t=b_0+b_1i+b_2j+b_3k\in H_s$, где $N_t\neq 0$, и $q=a_0+a_1i+a_2j+a_3k\in\mathbb{R}$. Тогда очевидно, что справедливы равенства $a_1=a_2=a_3=0$ и выполняется **теорема 2**, на основании которой имеем формулу

$$\prod{}_t(q)=tqt^{-1}=q+\frac{2}{N_t}\begin{vmatrix}0&0&j&k\\0&b_1&0&0\\0&b_2&b_1&-b_0\\0&b_3&b_0&b_1\end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то выполняется требуемое равенство $\prod_t(q)=q$. **Следствие 1** доказано.

Следствие 2. *Пусть* $q \in \mathbb{C}$ *и* $t \in \mathbb{C}$, *где* $N_t \neq 0$. *Тогда справедливо равенство* $\prod_t(q) = q$.

Доказательство. Зафиксируем любые числа $t = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$, и $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{C}$. Тогда имеют место равенства $a_2 = a_3 = 0$ и $b_2 = b_3 = 0$. Отсюда, ввиду справедливости для зафиксированных чисел **теоремы 2**, выполняется равенство

$$\prod{}_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & -b_0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Поскольку в определителе, стоящем в формуле (17), первый и второй столбцы пропорциональны, то он равен нулю. Отсюда и из равенства (17) вытекает требуемое соотношение $\prod_t(q) = q$. **Следствие 2** доказано.

Замечание 3. Следствие 2 описывает известный и легко устанавливаемый факт о том, что на множестве комплексных чисел преобразование подобия не изменяет преобразуемое комплексное число.

Следствие 3. *Для любых чисел* $q \in H_s$ *и* $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *выполняется соотношение* $\prod_t(q) = q$.

Доказательство. Возьмем произвольные числа $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда справедливы соотношения

$$b_1 = b_2 = b_3 = 0 \text{ и } N_t = b_0^2 + b_1^2 = b_0^2 \neq 0. \tag{18}$$

Следовательно, для выбранных чисел q и t имеет место **теорема 2**, пользуясь которой, а также первым соотношением в формуле (18), установим равенство

$$\prod{}_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Поскольку определитель с нулевым столбцом равен нулю, то в силу последней формулы выполняется требуемое равенство $\prod_t(q) = q \in H_s$. **Следствие 3** доказано.

Следствие 4. *Для произвольных чисел* $q \in \mathbb{C}$ *и* $t \in H_s$, *где* $N_t \neq 0$, *справедливо равенство*

$$\prod{}_t(q) = q + \frac{2a_1}{b_0^2 + b_1^2}\big((b_1 b_2 + b_0 b_3)\, j + (b_1 b_3 - b_0 b_2)\, k\big) \in H_s. \tag{19}$$

Доказательство. Возьмем любые числа $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{C}$ и $t = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in H_s$, где $N_t = b_0^2 + b_1^2 \neq 0$.

Тогда выполняются соотношения

$$a_2 = a_3 = 0 \text{ и } b_0 \neq 0 \text{ или } b_1 \neq 0. \tag{20}$$

Очевидно, что выбранные числа удовлетворяют **теореме 2**. Тогда на основании этой теоремы, а также первой из формул (20) имеет место равенство

$$\prod{}_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Разлагая определитель в равенстве (21) по первому столбцу, а далее – по первой строке, получим равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_1 & -b_0 \\ 0 & b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ b_2 & b_1 & -b_0 \\ b_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = -a_1 \left(-j \begin{vmatrix} b_2 & -b_0 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ b_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= a_1(b_1b_2 + b_0b_3)\, j + a_1(b_1b_3 - b_0b_2)k.$$

Отсюда и из формулы (21) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$, вынося a_1 за скобки, получим требуемую формулу (19). При этом отметим, что в силу справедливости хотя бы одного из неравенств (20) верны соотношения $\mathbb{C} \ni q \neq \prod_t(q) \in H_s$. **Следствие 4** доказано.

Замечание 4. Следствие 4 показывает, что преобразование подобия комплексного числа с помощью полукватерниона в результате дает число, являющееся полукватернионом.

Следствие 5. *При всяких числах* $q \in H_s$ *и* $t \in \mathbb{C}$, *для которого* $N_t \neq 0$, *выполняется равенство*

$$\prod_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2}\Big(-\big(a_3b_0 + a_2b_1\big)\, j + (a_2b_0 - a_3b_1)k\Big) \in H_s. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in H_s$ и $t = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k \in \mathbb{C}$, где $N_t \neq 0$. Тогда справедливы равенства $b_2 = b_3 = 0$ и существует число $t^{-1} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому выполняется теорема 2, а значит, с учетом последних равенств имеет место соотношение

$$\prod_t(q) = tqt^{-1} = q + \frac{2}{N_t}\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}. \tag{23}$$

Разложим определитель из формулы (23) вначале по второму столбцу, а затем полученный определитель третьего порядка – по первой строке. Имеем равенства

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & j & k \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \begin{vmatrix} 0 & j & k \\ a_2 & b_1 & -b_0 \\ a_3 & b_0 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 \left(-j \begin{vmatrix} a_2 & -b_0 \\ a_3 & b_1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ a_3 & b_0 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= b_1\Big(-\big(a_3b_0 + a_2b_1\big)\, j + (a_2b_0 - a_3b_1)k\Big).$$

Отсюда и из формулы (23) с учетом равенства $N_t = b_0^2 + b_1^2$ следует требуемое соотношение

$$\prod_t(q) = q + \frac{2b_1}{b_0^2 + b_1^2}\Big(-\big(a_3b_0 + a_2b_1\big)\, j + (a_2b_0 - a_3b_1)k\Big) \in H_s.$$

Следствие 5 доказано.

Замечание 5. Следствие 5 показывает, что при преобразовании подобия полукватерниона даже при помощи комплексного числа вид преобразуемого числа, вообще говоря, не сохраняется (изменяются коэффициенты при мнимых единицах j и k).

Заключение. В настоящей работе для множества полукватернионов введено понятие преобразования подобия и изучены отдельные ее свойства, предложен достаточно простой явный вид формулы нахождения преобразованного кватерниона. Полученные результаты в дальнейшем будут использованы при изучении геометрического смысла введенного преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов, Д.Г. Алгебраическая единая теория пространства-времени и материи на плоскости двойной переменной / Д.Г. Павлов, С.С. Кокарев // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2010. – Т. 7. – № 2 (14). – С. 11–37.
2. Бранец, В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М. : Наука, 1973. – 320 с.
3. Петров, А.М. Кватернионное представление вихревых движений / А.М. Петров. – М. : Компания «СПУТНИК», 2006. – 32 с.
4. Дегтярев, М.Ю. Алгоритмы моделирования поверхностей с применением методов ориентации твердого тела: автореф. дис. … канд. техн. наук : 05.13.12 / М.Ю. Дегтярев. – СПб., 2006. – 18 л.
5. Rosenfeld, B. Geometry of Lie groups / B. Rosenfeld. — Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 336 p.
6. Mortazaasl, H.A study on semi-quaternions algebra in semi-Euclidean 4-space / H. Mortazaasl, M. Jafari // Mathematical Sciences And Applications E-Notes. – 2013. – Vol. 1. – № 2. – P. 20–27.
7. Тихомиров, В. М. Десять доказательств основной теоремы алгебры / В.М. Тихомиров, В.В. Успенский // Математическое просвещение. — МЦНМО, 1997. — № 1. — С. 50—70.
8. Яглом, И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии / И. М. Яглом. — М. : Физматлит, 1963. — 192 с.
9. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время" (в 2-х тт.) / Р. Пенроуз, В. Риндлер. — М. : Мир, 1987, 1988 — 528 с., 572 с.
10. Кубышкин, Е.И. "Нелинейная алгебра пространства-времени" / Е.И. Кубышкин. — М. : Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2009. — 304 с.

Поступила 27.03.2019

THE SIMILARITY TRANSFORMATION IN THE SET OF SEMI-QUATERNIONS

A. KOZLOV, K. SURAVNEVA, N. ZHALEIKO

In this paper, the definition of a similarity transformation for semi-quaternion's is proposed and it is proved that, generally speaking, this transformation (as in the case of quaternion's [2, p. 29]) changes the form of the hypercomplex number being transformed. A formula is obtained for the transformation of the similarity of semi-quaternion's and some consequences that follow from it. In the future we plan to establish the geometric meaning of this transformation.

Keywords: *semi-quaternion, hypercomplex numbers, similarity transformation.*